ALGEBRA M2 - Lista 3

Suma prosta

Zad.1. Wykazać, że $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, gdzie

$$W_1 = \mathrm{Lin}(e_1, e_2) \text{ oraz } W_2 = \mathrm{Lin}(e_1 + e_2 + e_3),$$

oraz e_1, e_2, e_3 są wektorami bazy kanonicznej.

Zad.2. Wykazać, że $\mathbb{R}_n[x]$ jest sumą prostą postaci:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathrm{Lin}(w_0) \oplus \mathrm{Lin}(w_1) \ldots \oplus \mathrm{Lin}(w_n)$$

gdzie $w_k(x) = x^k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zad.3. Wykazać, że $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$, gdzie

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ oraz } W_2 = \mathrm{Lin}(1, 1, 1)$$

Zad.4. Znaleźć bazę i wymiar sumy algebraicznej $W_1 + W_2$ podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie

$$W_1 = \mathrm{Lin}((1, 1, 1, 0,), (0, 1, 1, 1)) \text{ oraz } W_2 = \mathrm{Lin}((0, 1, -1, 2), (2, 1, 1, -1)).$$

Sprawdzić, czy jest to suma prosta, tzn. czy $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

Zad.5. Niech $V = W_1 \oplus W_2$ i niech $T_1 \in L(W_1)$, $T_2 \in L(W_2)$. *Sumą prostą* przekształceń T_1 oraz T_2 nazywamy przekształcenie $T \in L(V)$ zdefiniowane wzorem

$$T(v) = T(w_1 + w_2) = T_1(w_1) + T_2(w_2)$$

gdzie $v = w_1 + w_2$ jest jednoznacznym przedstawieniem wektora v jako sumy wektorów $w_1 \in W_1$ oraz $w_2 \in W_2$. Piszemy wtedy $T = T_1 \oplus T_2$. Skonstruować przykład sumy prostej dwóch nietrywialnych przekształceń liniowych dla zadania 3.

Zad.6. W zadaniu 5 załóżmy, że $\dim(V) < \infty$. Niech M_1 będzie macierzą przekształcenia T_1 w bazie $\{e_1, \ldots, e_n\}$, natomiast M_2 macierzą przekształcenia T_2 w bazie $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Pokazać, że macierz przekształcenia $T_1 \oplus T_2$ w bazie $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m\}$ ma postać blokowo-diagonalną

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć macierz sumy prostej przekształceń liniowych dla przykładu skonstruowanego w zadaniu 5.

Romuald Lenczewski